

Over de ontwikkeling van de snelheid van wielrenners, skiërs en andere sporters in een afdaling bestaat veel onbegrip. Het lijkt zo eerlijk om zwaardere wielrenners – die in de beklimming meer energie moeten leveren om de lichtgewichtten bij te houden – in de afdaling te belonen met een hogere snelheid. Echter ...

Zwaar in het voordeel?

Harry Oonk

Iedereen is wel bekend met het feit dat lichte renners bij het beklimmen van een col in het voordeel zijn. Maar er heerst ook in sportland veel misverstand over de voor- en nadelen van het gewicht van een renner in de afdaling. Dit heeft waarschijnlijk te maken met het feit dat in de beklimming gelet wordt op de hoeveelheid *energie* die een renner moet leveren om zichzelf en zijn fiets omhoog te brengen, terwijl bij het afdalen gekeken wordt naar de ontwikkeling van de *snelheid*. Dat zijn echter verschillende beschouwingen; energie en snelheid zijn verschillende grootheden.

Verschillende grootheden

Op de maan zijn zowel de zwaartekracht als de luchtdichtheid kleiner

dan op aarde. Het klassieke valexperiment door een bemanningslid van de Apollo 15 in 1971 (zie video¹) liet zien dat een veertje en een hamer daar even snel vallen. Dat dit ook in een vacuüm op aarde het geval is werd overtuigend getoond² in het BBC-programma *Human Universe* (23 oktober 2014). En ooit, zo gaat het verhaal, liet Galileo Galilei vanaf de toren van Pisa twee kogels van verschillend gewicht naar beneden vallen. Naar verluid kwamen ze tegelijk op de grond (geen videobewijs). Toch weet ook iedereen dat een opgeblazen ballon en een even grote voetbal bij een val van (bijvoorbeeld) vijf meter hoog niet gelijk op de grond komen. Hoe zit het nu?

Lichamen van verschillend gewicht vallen even snel als de luchtweerstand niet of nauwelijks een rol speelt. Maar als de luchtweerstand erg groot is ten opzichte van de massa (bijvoorbeeld bij een veer), wordt de valsnelheid bepaald door zowel de massa als de luchtweerstand. In dit artikel wordt de invloed van de massa van een wielrenner op de toename van de snelheid in een afdaling beschreven. Achtereenvolgens komen de invloed van de rolweerstand en de invloed van de luchtweerstand op de toename van de snelheid aan de orde.

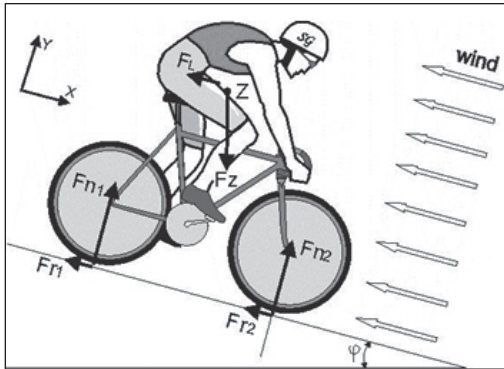
De kogels van Galilei

Volgens de overlevering liet Galileo Galilei in de zestiende eeuw twee kogels van verschillend gewicht van de toren van Pisa naar beneden vallen en zouden die kogels gelijktijdig zijn neergekomen. Historici twisten over de vraag of het om een gedachtenexperiment ging, of dat het daadwerkelijk is uitgevoerd. Hoe dan ook, om op een eerlijke manier het effect van het gewicht op de valsnelheid te kunnen onderzoeken dienen twee voorwerpen met dezelfde grootte en vorm te worden gebruikt, zodat de luchtweerstand hetzelfde is. Bijvoorbeeld twee even grote ballen van respectievelijk metaal en piepschuim.

Probleemstelling 1

Wat is de invloed van de massa op de snelheid van wielrijders in de afdaling van een col met een helling van 10% indien de rolweerstand en de luchtweerstand worden verwaarloosd?

De zwaartekracht (F_z) die in de afdaling op een fietser (inclusief fiets) werkt is het product van zijn massa (m) en de versnelling van de zwaartekracht (g): $F_z = m g$. De fietser beweegt echter niet in de richting van die zwaartekracht, maar in de richting van de veronderstelde helling, de x-richting



Figuur 1. Krachtenspel op wielrenner en fiets in de afdaling.

(zie figuur 1). De component van de zwaartekracht die de fietser zal doen versnellen in de afdaling is dan ook die component die ontbonden is in de wegrichting (zie figuren 1 en 2). Deze component is gelijk aan

$$F_x = m g \sin \varphi$$

waarbij

m = massa van fietser met fiets [kg];
 g = versnelling van de zwaartekracht [m/s^2];
 φ = hellingshoek van 10% ofwel $5,7^\circ$ met de horizontaal;
 a = versnelling van de renner in de x-richting [m/s^2].

De tweede wet van Newton ('kracht is massa maal versnelling'), levert in de x-richting:

$$F_x = m g \sin \varphi = ma$$

Zowel in het linker als rechter lid van de vergelijking staat de massa (m), zodat ze beide gedeeld kunnen worden door die massa. Dus er geldt:

$$a = g \sin \varphi$$

Met andere woorden: de versnelling van de renner is (onder de veronderstelde omstandigheden, dus zonder rol- en luchtweerstand) constant en onafhankelijk van de massa. De betekenis hiervan is dat zowel lichte als zware renners een even grote constante versnelling ondergaan en dus even snel zullen dalen. Na 2 minuten dalen vanuit stilstand is de snelheid van beide renners al 421 km/h (!), met een afgelegde weg van 7 km. In werkelijkheid is er uiteraard wel sprake van rol- en luchtweerstand. We bekijken eerst de invloed van de rolweerstand.

Probleemstelling 2

Wat is de invloed van de massa op de snelheid van wielrijders in de afdaling van een col met een helling van 10% indien rekening wordt gehouden met de rolweerstand, maar de luchtweerstand wordt verwaarloosd?

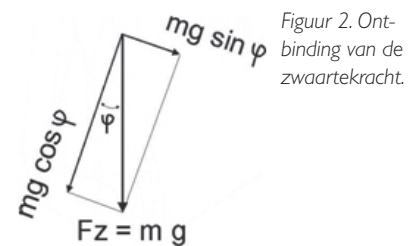
Rolwrijving kan – evenals slepende wrijving – worden beschreven met een weerstandcoëfficiënt. De grootte van de rolweerstandcoëfficiënt (f_r) hangt af van de ruwheid van wegdek en band, de stijfheid van het bandmateriaal, de druk in de banden en de diameter van het wiel.

De grootte van de totale rolweerstandkracht op voor- en achterwiel (zie figuur 1, $F_{rol} = F_{r1} + F_{r2}$,) is gelijk aan de rolweerstandcoëfficiënt (f_r) vermenigvuldigd met de normaalkracht (F_n) die op een lichaam werkt:

$$F_{rol} = f_r F_n$$

De totale normaalkracht (zie figuur 1, $F_n = F_{n1} + F_{n2}$) op de beide wielen is even groot als de component van de zwaartekracht die loodrecht op de weg staat en tegengesteld van richting: actie is reactie volgens de derde wet van Newton:

$$F_n = m g \cos \varphi \text{ (zie figuur 2).}$$



Figuur 2. Ontbinding van de zwaartekracht.

De totale rolweerstand in de x-richting (tegengesteld aan de bewegingsrichting) kan dan worden uitgedrukt in:

$$F_{rol} = f_r F_n = f_r m g \cos \varphi$$

Het krachtenspel op de renner plus fiets in de x-richting volgens $F = ma$ wordt dan:

$$m g \sin \varphi - f_r m g \cos \varphi = ma$$

In de drie factoren van de vergelijking komt de massa (m) in de eerste graad voor, zodat de hele vergelijking er door gedeeld kan worden. De versnelling in de x-richting wordt dan:

$$a = g \sin \varphi - f_r g \cos \varphi$$

Dit betekent dat de versnelling constant is en onafhankelijk van de massa: zowel lichte als zware renners ondergaan een even grote versnelling en dus dalen zij even snel. Bij een rolweerstandcoëfficiënt van $f_r = 0,005$ (racefietsen) is de snelheid van de renner na 2 minuten dalen vanuit stilstand opgelopen tot zo'n 400 km/h, met een afgelegde weg van 6,7 km.

Probleemstelling 3

Wat is de invloed van de massa op de snelheid van wielrijders in de afdaling van een col met een helling van 10% indien zowel de rolweerstand als de luchtweerstand in de berekeningen wordt betrokken?

De luchtweerstandkracht (F_L , zie figuur 1) van een bewegend voorwerp hangt af van de druk die de lucht op dat lichaam uitoefent. Deze weerstand is volgens Bernoulli afhankelijk van het kwadraat van de snelheid (v), de soortelijke massa (ρ) van het medium (in dit geval lucht), de stroomlijn (C_w , vormweerstandcoëfficiënt) en het frontale oppervlak van het door het medium bewegende lichaam (A), volgens de vergelijking:

$$F_L = \frac{1}{2} \rho C_w A v^2$$

De krachtenbalans voor de bewegingsrichting (x) wordt dan:

$$mg \sin \varphi - f_r mg \cos \varphi - \frac{1}{2} \rho C_w A v^2 = ma$$

Vertaling: de zwaartekracht in de bewegingsrichting, minus de rolweerstandkracht en minus de luchtweerstandkracht is gelijk aan de massa maal de versnelling van de renner in de x -richting.

De luchtweerstand is afhankelijk van de snelheid. De versnelling is per definitie de verandering van de snelheid in de tijd volgens

$$a = \frac{dv}{dt}$$

Deze zogenaamde eerste orde differentiaalvergelijking in de snelheid is dan als volgt te schrijven:

$$mg \sin \varphi - f_r mg \cos \varphi - \frac{1}{2} \rho C_w A v^2 = m \frac{dv}{dt}$$

Niet in alle termen van de vergelijking komt de massa lineair voor, waardoor niet de hele vergelijking te delen is door de massa. De snelheid is daarmee

Kop over kop

Bij snelheden in de buurt van 40 km/h is het effect van de slipstream – in het zog van de voorganger rijden – dat er zo'n 30% minder aan energie hoeft worden geleverd. Een renner van 60 kg die in de slipstream van een renner van 80 of 100 kg rijdt kan daardoor gemakkelijk voldoende extra snelheid opbouwen om zijn voorganger (tijdelijk) in te halen. Zodra hij uit de slipstream komt zal de luchtweerstand echter weer 'normaal' zijn. Daardoor zal het snelheidsverschil tussen beide renners afnemen en uiteindelijk omslaan naar een hogere snelheid voor de zwaardere renner, die dus weer op kop komt, waarna het spel weer van voren af aan kan beginnen. Kop over kop zonder trappen!

afhankelijk van de massa.

Bij lage snelheden – zoals in de beklimming van een col – is de luchtweerstand van weinig invloed. Bij toenemende snelheid neemt de luchtweerstandkracht echter met het kwadraat van de snelheid toe. Op een bepaald moment zal de luchtweerstand zo groot worden dat de snelheid niet meer toeneemt. De versnelling is dan nul geworden en de vergelijking gaat over in:

$$mg \sin \varphi - f_r mg \cos \varphi - \frac{1}{2} \rho C_w A v^2 = 0$$

Voor renners met een gewicht van respectievelijk 60, 80 en 100 kg wordt de maximale snelheid berekend met behulp van de volgende gegevens (zie kader):

$\varphi = 10\%$	hellingshoek van de afdaling in procenten (in graden: $\varphi = 5,7^\circ$);
$m = 60, 80, 100$ [kg]	massa van de renner, inclusief fiets;
$A_{60} = 0,400$ [m ²]	frontaal oppervlak van renner plus fiets bij $m = 60$ kg;
$A_{80} = 0,483$ [m ²]	frontaal oppervlak van renner plus fiets bij $m = 80$ kg;
$A_{100} = 0,557$ [m ²]	frontaal oppervlak van renner plus fiets bij $m = 100$ kg;
$\rho = 1,25$ [kg/m ³]	soortelijke massa (dichtheid) van lucht;
$C_w = 0,8$	vormweerstandcoëfficiënt van een renner in daalhouding (zie figuur 1);
$g = 9,81$ [m/s ²]	versnelling van de zwaartekracht;
$f_r = 0,005$	rolweerstandcoëfficiënt;
v [m/s]	snelheid van de renner;
$v(0) = 0$ [m/s]	beginsnelheid van de renner;
$\frac{dv}{dt} = a$ [m/s ²]	versnelling van de renner in de x -richting.

Uitwerking van de vergelijking levert:

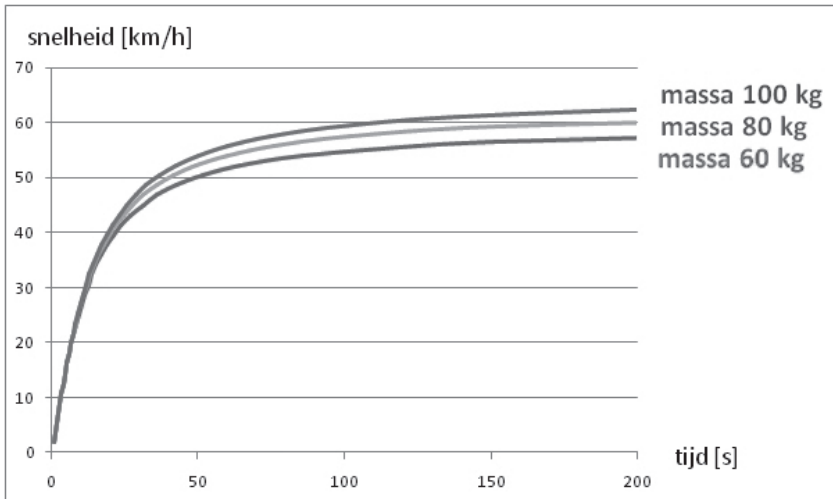
- maximale daalsnelheid bij een massa van 60 kg: $v_{\max 60} = 60$ km/h
- maximale daalsnelheid bij een massa van 80 kg: $v_{\max 80} = 63$ km/h

- maximale daalsnelheid bij een massa van 100 kg: $v_{\max 100} = 66$ km/h
- De toename van de maximale snelheid in de afdaling van 60 naar 63 km/h is een toename van 5%, terwijl de massa is toegenomen van 60 naar 80 kg, ofwel 33%!
- De toename van de maximale snelheid van 60 naar 66 km/h is 10%, terwijl de massa is toegenomen van 60 naar 100 kg, ofwel 67%!

Conclusie: de winst in de maximale snelheid is slechts gering ten opzichte van de gewichtstoename. De maximale eindsnelheid wordt bovendien pas bereikt na een oneindig lange afdaling en dat is natuurlijk niet reëel. In werkelijkheid is het voordeel van een grotere massa dus nog iets kleiner.

Versnelling vanuit stilstand

Dat was de maximale snelheid, nu de toename van de snelheid vanuit stilstand. De vergelijking van de snelheid was:



Figuur 3. Ontwikkeling van de snelheden (y-as) in de tijd (x-as) van renners met een massa van respectievelijk 60, 80 en 100 kg tijdens een afdaling.

$m g \sin \varphi - f_r m g \cos \varphi - \frac{1}{2} \rho C_w A v^2 = m \frac{dv}{dt}$

Deze eerste orde differentiaalvergelijking met niet constante coëfficiënten is niet analytisch op te lossen, maar moet numeriek worden benaderd voor de ontwikkeling van de snelheid. Substitutie van bijvoorbeeld de gegevens bij $m = 60$ kg levert (zie kader):

– Het voordeel van zwaardere renners in een afdaling is zeer gering en doet zich pas na langere tijd en/of bij hogere snelheden voor.

Andere sporten

Bij skiërs neemt evenals bij wielrenners bij toenemende massa ook het frontale oppervlak toe. Voor hen geldt dus het-

$$60 \cdot 9,81 \cdot \sin 5,7^\circ - 0,005 \cdot 60 \cdot 9,81 \cdot \cos 5,7^\circ - 0,5 \cdot 1,25 \cdot 0,8 \cdot 0,4 \cdot v^2 = 60 \frac{dv}{dt}$$

$$\text{Voor } m = 60 \text{ kg geldt: } 0,9255 - 0,00333 v^2 = \frac{dv}{dt}$$

$$\text{Voor } m = 80 \text{ kg geldt: } 0,9255 - 0,00302 v^2 = \frac{dv}{dt}$$

$$\text{Voor } m = 100 \text{ kg geldt: } 0,9255 - 0,00278 v^2 = \frac{dv}{dt}$$

In figuur 3 staat de ontwikkeling van de snelheden van de verschillende massa's tot 200 seconden. Hierin is te zien dat het vanuit stilstand wel even duurt voordat er tussen lichtere en zwaardere renners merkbare snelheidsverschillen beginnen te ontstaan.

Conclusies

– Zwaardere wielrenners zijn bij een beklimming in het nadeel omdat de energie die zij moeten leveren evenredig toeneemt met hun massa.

zelfde als voor wielrenners.

Bij bobsleeën neemt bij toenemende massa (zwaardere bobbys) het frontale oppervlak van de bob niet toe en dus zijn zwaardere teams (als we het aanduwen van de slee voor het gemak even buiten beschouwing laten) in het voordeel.

Referenties

1. <https://www.youtube.com/watch?v=KDp1tiUsZw8>
2. <http://www.bbc.co.uk/programmes/p02985m0>

Een soortgelijke beschouwing over wielrenners in de afdaling is eerder door dezelfde auteur gepubliceerd in *Versus Tijdschrift voor Fysiotherapie*, nummer 2/1992.

Over de auteur

Ir. Harry Oonk is docent biomechanica aan de masteropleiding Manuele Therapie (Utrecht) en gastdocent bij de opleiding Bewegingstechnologie van de Haagse Hogeschool. Hij is tevens schrijver van meerdere boeken, forensisch analist, stadsdichter van Ede en imker. Voor meer informatie: www.harryoonk.nl.